CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XIX-a, BĂILEȘTI, 16 MARTIE 2024

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Partea întreagă a numărului $-\sqrt{2024}-2024$ este egală cu:

a) -2068 b) -2069 c) -2070 d) 0

2) Fie $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k,\ n\in N^*$. Atunci:

a) $S_{100}=100\cdot 2^{100}$ b) $S_{100}=100\cdot 2^{101}$ c) $S_{100}=99\cdot 2^{101}-2$ d) $S_{100}=99\cdot 2^{101}+2$

3) Fie $a,b,c\in R$ pentru care $a+b+c=9$. Dacă $E=a^2+b^2+c^2$, atunci:

a) $E\le 3$ b) $E\le 9$ c) $E\ge 27$ d) $E<27$

4) Fie A, B, C trei puncte distincte din plan şi M mijlocul segmentului BC. Dacă $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3x\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{BA},\ x\in\mathbb{R}$, atunci x este egal cu:

a) $\frac{3}{4}$ b) 1 c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

5) Fie ABC un triunghi oarecare şi punctele D, E pe latura BC astfel încât $BD=DE=EC$. Notăm cu M, N, Q mijloacele laturilor AB, AC respectiv BC. Valoarea numărului real a pentru care $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{EN}=a\overrightarrow{QA}$ este:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$

Probleme propuse de prof. Cătălin Cristea, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_{n\ge 0}$, definit prin relaţia de recurenţă: $a_0=a_1=1,\ a_2=3$ şi

$$a_{n+1}=\frac{2a_n^{\,2}\cdot a_{n-2}-a_n\cdot a_{n-1}^2}{a_{n-1}\cdot a_{n-2}},n\ge 2.$$

(P*rof.Vasile Pop, Gazeta Matematică 1/2022*)

Problema 2 (20 puncte)

Fie $a,b,c\ge 1$. Demonstrați că: $\frac{a}{b}\left(a^2+3\right)+\frac{b}{c}\left(b^2+3\right)+\frac{c}{a}\left(c^2+3\right)\ge 3(a+b+c)+\frac{9}{a+b+c}$.

P*rof. Cătălin Cristea, Craiova*

Timp de lucru: 2 ore și 30 min

Din oficiu se acordă : 10 puncte

Barem de evaluare - Concursul interjudețean de matematică "Sfera" 2024, clasa a IX-a

Partea I : 1) **b** 2) **d** 3) **c** 4) **c** 5) **a**

Partea a II-a:

1) Relaţia de recurenţă se scrie echivalent $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}},\ n\geq 2$ ……**5p**

Fie $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ şi obţinem $b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n,\ \forall n\geq 2$, deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.....**5p**

$b_1=\frac{a_1}{a_0}=1,\ b_2=\frac{a_2}{a_1}=3$ deci raţia progresiei $(b_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 2…….....**2p**

Rezultă $b_n=2n-1,\ \forall n\geq 1$ ……**3p**

Prin înmulţirea relaţiilor $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2n-1$ obţinem $a_n=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1),\ \forall n\geq 1$ ……...**5p**

2) $a\geq 1\Rightarrow (a-1)^3\geq 0\Rightarrow a^3+3a\geq 3a^2+1\Rightarrow \frac{a}{b}(a^2+3)\geq 3\frac{a^2}{b}+\frac{1}{b}.$

Analog $\frac{b}{c}(b^2+3)\geq 3\frac{b^2}{c}+\frac{1}{c}$ și $\frac{c}{a}(c^2+3)\geq 3\frac{c^2}{a}+\frac{1}{a}$ ……..…**5p**

Adunând cele trei inegalități obținem:

$\frac{a}{b}(a^2+3)+\frac{b}{c}(b^2+3)+\frac{c}{a}(c^2+3)\geq 3\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$……..…**5p**

Folosind inegalitatea Titu Andreescu obținem:

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c$ și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}=\frac{9}{a+b+c}$. ……..…**5p**

Obținem $\frac{a}{b}(a^2+3)+\frac{b}{c}(b^2+3)+\frac{c}{a}(c^2+3)\geq 3(a+b+c)+\frac{9}{a+b+c}$, cu egalitate pentru $a=b=c=1$……..……..……**5p**